p 進整数環のあれこれ

Kit

概要

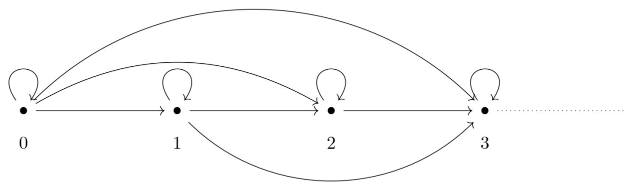
代数的整数論の分野では，しばしばp進整数環というものについて考えることがあります．ここでは，その p進整数環の定義やその性質， p進整数環が実際に活躍する場について紹介します．

p進整数環について

まず， p 進整数環の定義や構造を紹介します．

p 進整数環とは

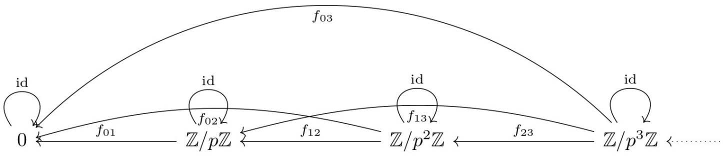
順序集合$\mathbb{N}$の元を点とし，その順序によって射をいれた次の有向グラフを考えます．



この有向グラフに対して，点には$\mathbb{Z}$加群 $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を対応させ，射にはその射とは逆向きに以下の準同型写像を対応させます．

$f_{nm}: \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}; x + p^m\mathbb{Z} \mapsto x + p^n\mathbb{Z}$

これによって，次の$\mathbb{Z}$加群の図式を得ます．



この図式の射影極限$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$を$\mathbb{Z}_p$と書き，$p$進整数環といいます．これが p進整数環の定義です．具体的には，次の形で書くことができます．

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ (x_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \,\middle|\, n \le m \implies f_{nm}(x_m) = x_n \right\}$$

p 進整数環の環構造の入れ方

上で定義した$\mathbb{Z}$加群の$\mathbb{Z}_p$に対して，次の和と積を定めます．
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}_p$ に対して，

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

すると，$(0)_{n\in\mathbb{N}}$ が零元，$(0,1,1,\cdots)$ が単位元となり，$\mathbb{Z}_p$は単位元付き可換環となります．

p 進整数環の位相の入れ方

$\mathbb{Z}_p$に対しては，次のようにして位相をいれます．

1. $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ に離散位相をいれる
2. $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ に直積位相をいれる
3. $\mathbb{Z}_p \subset \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ に相対位相をいれる

p 進整数環の性質

次に， p 進整数環の性質を見ます．

$\mathbb{Z}_p$ はコンパクト空間

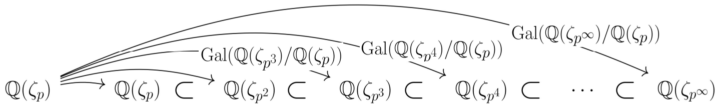
$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ には離散位相が入っており，有限集合であるので，コンパクトです．Tychonoff の定理から，$\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ もコンパクトです．$\mathbb{Z}_p$ は $\prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$の閉部分集合であり，コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトであることから，$\mathbb{Z}_p$はコンパクト空間だとわかります．

$\mathbb{Z}_p$ は位相環

先ほど定めた環構造と位相構造に関して，和，積，そして和に関して逆元をとる操作はすべて連続写像となります．このような性質を持つ環を位相環といいます．つまり，$\mathbb{Z}_p$は位相環です．

p 進整数環が活躍する場

ここからは，p進整数環が使われる場面を見ていきます．Galois 拡大 K/k の Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/k)$ が $\mathbb{Z}_p$の加法群と位相同型であるとき，K/k を $\mathbb{Z}_p$拡大といいます．具体的には，次のような拡大が $\mathbb{Z}_p$ 拡大となります．ζ_{p^n}を 1 の原始 p^n 乗根，$\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty}) = \bigcup \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$とし，簡単のため，$p$ を奇素数とします．すると，次の拡大列が考えられます．



このとき，

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

であり，

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\zeta_p)) \cong \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$

となります．故に，$\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\zeta_p)$ は $\mathbb{Z}_p$拡大とわかります．
では，そもそもなぜ$\mathbb{Z}_p$拡大なるものを考えるのでしょう．$\mathbb{Z}_p$拡大は岩澤の類数公式などに大きく関わります．岩澤の類数公式はその名の通り，イデアル類群の位数，類数の性質を与えるものです．代数的整数論において，類数を調べることはとても重要であり，その体の素因数分解の一意性を知ることに繋がります．
だからこそ，$\mathbb{Z}_p$なるものを考えることが重要なのです．

参考文献

[1] 加藤和也，黒川信重，斎藤毅，数論 I —Fermat の夢と類体論—，岩波書店，2005.
[2] 黒川信重，栗原将人，斎藤毅，数論 II —岩澤理論と保型形式—，岩波書店，2017.
[3] 志甫淳，層とホモロジー代数，共立出版，2016.
[4] 福田隆，岩澤理論 —理論から計算まで—，SGC ライブラリ 145，サイエンス社，2018.