ニュートンの運動方程式の数理構造

ぶじょんぬい

1 はじめに

(高校でも習うように) 古典力学では、ベクトルの扱いにおいて並行移動しても同じと習った。従ってこれを扱う上で$\mathbb{R}^n$では不十分であり、時間軸を加えた$(1+n)$次元時空$\mathbb{R}^n$は原点に依存する天動説的なものになってしまう。そこで、古典力学にふさわしいベクトル空間を改めて定義し、有効線分を定式化することで、ニュートンの運動方程式がその空間の中で満たされることをみよう。

アフィン空間の商空間、その同型

集合 X がベクトル空間 V を基準ベクトルとするアフィン空間であるとは、ある$\{\tau_v | v \in V\}: X \to X$が存在して

(A1)$\forall u, v \in V,\ \tau_u \cdot \tau_v = \tau_{u+v}$

(A2)$\forall p, q \in X, \exists v \in V, \tau_v(p) = q$

が満たされること定義する。このとき、有効線分

$$\gamma_{p,q}: [0,1] \ni t \mapsto p + t(q-p) = \tau_{t(q-p)}(q) = \tau_{tv}(q) \in X$$

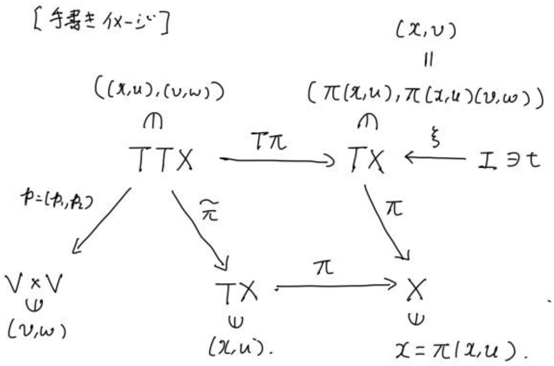
に対し$\gamma_{p,q} \sim \gamma_{p',q'} \Leftrightarrow q - p = q' - p'$と定めるとこれが同値関係になり,有効線分のなす集合$\Gamma = \{\gamma_{p,q}: [0,1] \to X;\ \ p, q \in X\}$に対し、$W = \Gamma/\sim$は$V$と線型同型なベクトル空間になる。ここで$X$は配位空間に対応し、各点$p \in X$に対し位置ベクトルのなすベクトル空間を$V_p = T_p X = \{(p, v); v \in V\}$で表すことにする。

ガリレイ時空、時間と空間の分離

実ベクトル空間Wを基準ベクトルとするアフィン空間Yがガリレイ時空であるとは、非零線型形式$T: W \to \mathbb{R}$が存在して$Ker\ T$が0でないノルム空間であると定義する。Tは時間間隔と呼べるだろう。事象$p, q \in Y$が同時であるとは$q - p \in Ker\ T$であると定義する。このとき$v_0 \in W$¥$Ker\ T$を任意にとるとWの元wに対し、$\psi(w) = (\frac{Tw}{Tv_0}, w - \frac{Tw}{Tv_0} v_0)$とするとこれは$\mathbb{R} \times Ker\ T$との線形同型写像になり、ガリレイ時空は時間と空間に分離される。これは、初期時刻を特別に定めなくても“同時”という概念が、時空を時間と空間に分離することを意味する。

相空間

実ノルム空間Vを基準ベクトルとするアフィン空間Xを位置ベクトルの属す配位空間と設定すれば接バンドル$TX = \bigcup_{p \in X} T_p X = X \times V$は相空間と特徴づけられる。時間空間$I \subset \mathbb{R}$に対し、$\xi(t) = (x(t), v(t)) \in TX$は相空間の運動に対応する。$X$がアフィン空間であることに気を付ければ$x'(t)$は基準ベクトルの空間$V$の元であり、$\xi'(t)$は$V \times V$の元になる。一方、接バンドルから$X$への射影を$\pi: TX \to X$,その微分を$\pi': TX \to V$とすれば、その接写像は$T\pi: TTX \ni ((x,u), (v,w)) \mapsto (\pi(x,u), \pi'(x,u)(v,w)) = (x, v) \in TX$となる。ここで$TTX = TX \times (V \times V) = (X \times V) \times (V \times V)$は$X$の二重接バンドルであり、$TTX$から$TX$及び$V \times V$への射影を $\tilde{\pi}$ 及び$p = (p_1, p_2)$とすれば$T\pi = (\pi \circ \tilde{\pi}, (\pi' \circ \tilde{\pi}) \cdot p) = (\pi \circ \tilde{\pi}, p_1)$となる。



二階のベクトル場

$f: TX \to TTX$が二階のベクトル場であることを$T\pi \cdot f = id_{TX}$を満たすものとして定義する。このとき、$p \circ f: TX \to V \times V$の任意の積分曲線$\xi: I \ni t \mapsto (x(t), v(t)) \in TX$は次の等式を満たす。

$$\xi'(t) = (x'(t), v'(t)) = (v(t), (p_2 \circ f)(x(t), v(t)))$$

ニュートン力学の基礎的枠組み

ガリレイ時空を時間軸と配位空間の積アフィン空間に分解し、質点の状態が時間軸の基準ベクトル空間$\mathbb{R}$の区間 I 上で定義された写像$I \ni t \to \xi(t) = (x(t), v(t)) \in TX$により記述されるとし、与えられた力の場$f$とは、相空間$TX$上で定義された写像(二階のベクトル場)とする。この力の場を用いて、V上で

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) \\ x''(t) = v'(t) = (p_2 \cdot f)(x(t), v(t)) \end{cases}$$

が満たされる。これは(質量を 1 とみなした)運動方程式に他ならない。この基礎的枠組みは自然と(無限次元を含む)バナハ多様体に拡張される。

運動方程式は解けるのか？

さて基本設定に戻ろう。上のような(一般にバナハ空間上の)ニュートンの運動方程式は、果たして滑らかな一意解をもつのか？というのは自然な疑問だ。実は、通常のR^nの時の常微分方程式と同様に、連続な力の場fが$X \times X$上局所リプシッツならば極大解の存在と一意性が従い、さらにfが適当な有界性を持っていれば大域解の存在が従う。

参考文献

[1]　小澤徹,『物理学としての微分方程式序論』, サイエンス社, 2016

[2]　新井朝雄,『物理現象の数学的諸原理』, 共立出版, 2003