

ホイットニーの埋め込み定理

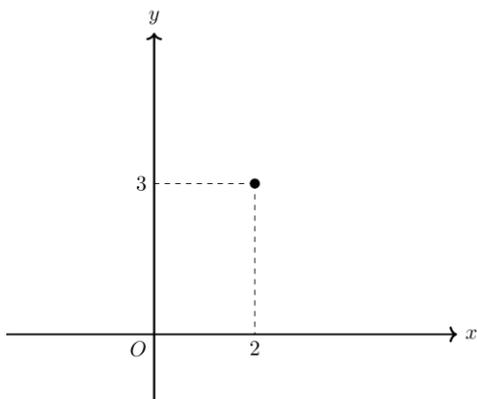
ゆーぐま

概要

n を自然数としたとき、各点が n 個の実数の組で表される空間を n 次元ユークリッド空間と呼ぶ。ユークリッド空間の縁のない図形を貼り合わせた多様体と呼ばれる図形がある。本ポスターでは多様体は十分大きい次元のユークリッド空間の中に埋め込めることを主張するホイットニーの埋め込み定理について証明は省くが見ていく。

ユークリッド空間と開集合

ユークリッド空間の具体例についてみよう。たとえば2次元ユークリッド空間とは各点が2個の実数の組で表される空間であり、これは通常の xy 平面などの座標平面のことである。2次元ユークリッド空間の点は例えば $(2, 3)$ のようなもので表されて(下の図参照)、これは高校で導入されたであろう位置ベクトルに対応する。



このようなユークリッド空間のなかで“縁がない”図形のことを開集合という。正確には、ユークリッド空間の部分集合 U で、 U の中のどんな点 p に対してもある正の数 d があって点 p から距離 d だけ離れてもまだ U の中にあるような部分集合 U のことである。たとえば、 xy 平面において $x^2 + y^2 < r^2$ (r は正の実数)で表されるような開円板と呼ばれる図形は開集合である。

多様体

余白の都合上詳しくは書けないが、縁や、点の近くを表す部分集合の集まり、開集合、有向点列と呼ばれる点の集まりの収束などの構造が定まっている集合のことを位相空間という。実は挙げた四つのいずれかが定まれば自動的に他のものも定まることが知られている。さて、位相空間があれば“連続的に”移すことが定義出来る。少し正確には移る先の誤差を、移す前の誤差を小さくすれば、いくらでも小さく制御できることを連続的と言っている。位相空間が二つあって、それが連続的に変形しあえる位相空間であるとき、同相であるという。これはどのくらいの変形を許すかというドーナツをマグカップに、三角形を四角形や丸に移せるくらいゆるゆるな関係である。ただし、元に戻せないくらい潰す、たとえば平面を線に潰すことは許されていない。(ちなみにこれは

ホモトピー同値と呼ばれる関係になる)

位相空間であって各点の周りで n 次元ユークリッド空間の開集合と同相な開集合が取れて、詳しくは省くが慣例的には第二可算とハウスドルフと呼ばれる条件を課したものを n 次元位相多様体という。たとえばユークリッド空間そのものはそれ自体が開集合であり n 次元位相多様体である。

座標近傍とアトラス

位相空間を覆うような開集合の集まりを開被覆という。 n 次元位相多様体の開被覆であってそれぞれの開集合が n 次元ユークリッド空間の開集合と同相で、その移りあい方を固定したものとその開被覆を合わせたものをアトラスといい開被覆のうちの一つの開集合を座標近傍と言って、座標近傍とユークリッド空間の開集合への移りあい方のセットを座標近傍系、特に開被覆が重なっているところではユークリッド空間→多様体→ユークリッド空間のようになるのでただの実数を変数にとって実数を返す関数ができることを変換関数といってどんな変換関数でもこれを r 階微分できるようなアトラスを C^r 級アトラスと呼ぶ。 C^r 級アトラスと多様体のセットを C^r 級多様体といい、 C^r 級多様体同士の間にはユークリッド空間に移してしまっただけで表示する(座標表示と呼ぶ)ことで、 C^r 級で移りあう C^r 級微分同相という関係を定義することができる。これは同相よりもさらに厳しい条件で、やや語弊を含む言い方だが丸い所を角に移すことはできない。

ホイットニーの埋め込み定理

さて、ホイットニーの埋め込み定理というのは、実はいろんなバリエーションがあるがWhitneyが1944年に発見した代表的なものでは n 次元位相多様体は $2n$ 次元のユークリッド空間の位相空間の構造にマッチするような部分多様体への微分同相がある(埋め込み)、という主張である。たとえば円は1次元の多様体であるが、ご存じのように平面の中に埋め込むことができる。これが見てもらったように抽象的な定義のはずの多様体でどんな次元でも成立してしまうのである。

参考文献

- [1] M. W. Hirsch, “Differential Topology,” Graduate texts in mathematics, Springer, 1976, p. 27.
- [2] Whitney, H. “The self intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space,” Annals of Math. 45, 1944, pp. 220-246.