電弱統一理論における素粒子の質量獲得

うぉむ

概要

電磁相互作用と弱い相互作用は Glashow-Weinberg-Salam 理論という**ゲージ群が$SU(2)_L \times U(1)_Y$であるゲージ理論**で統一的に説明できることが分かっており，GWS 理論は**電弱統一理論**であると考えられています．GWS 理論では **Higgs 機構によってゲージボソンが質量を獲得**し，湯川相互作用項での**自発的対称性の破れによってフェルミオンが質量を獲得**します．

自発的対称性の破れ

Linear Sigma Model と呼ばれる次の Lagrangian で記述されるN個の実スカラー場の理論を考えます．

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}\{(\phi^i)^2\}^2$$

この理論は N次直交行列 R^{ij}による変換

$$\phi^i \longrightarrow R^{ij}\phi^j$$

のもとで不変なので$O(N)$対称性を持ちます．ポテンシャル$V(\phi)$は

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}\{(\phi^i)^2\}^2$$

で， $N=2$の場合ポテンシャルの図は図 1 のようになります．このポテンシャルは次のようになります．

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left\{(\phi^i)^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}\right\}^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

よってポテンシャルが最小となるのは場 $\phi^i(x)$が次を満たす定数 ϕ_0^iであるときです．

$$(\phi_0^i)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

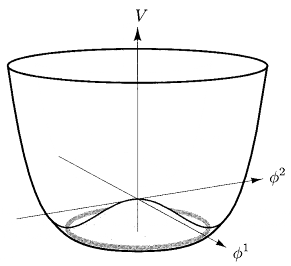

図 1：$N=2$の場合のポテンシャル（出典：[1]，p. 350）

古典的には場の真空期待値はポテンシャルを最小にする場の値になります．複数ある真空期待値のうち１つの真空期待値を選ぶことは**複数ある真空のうち１つの真空を選ぶ**ことと同じです．ここで次のように真空期待値を決めます．

$$\phi_0^i = (0, 0, \cdots, 0, v) \qquad \left(v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

ここでN個の場 $\phi^i(x)$を次のように$N-1$個の場 $\pi^k(x)$と1個の場$\sigma(x)$を用いて次のように表します．

$$\phi^i(x) = (\pi^k(x), v + \sigma(x))$$

これを用いて Lagrangian を書き換えると次のようになります．

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 \\ &- \sqrt{\lambda}\mu(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\{(\pi^k)^2\}^2\end{aligned}$$

これを見ると**$N-1$個の質量を持たない場 π^kと1個の質量を持つ場 σ が結合している**ことがわかります．また**$O(N)$対称性は破れて$O(N-1)$対称性になっています**．このように系全体が持っている対称性を真空が持たない，つまり真空期待値が0ではない場合には低エネルギー領域ではこの対称性を持たず**対称性が自発的に破れている**と言います．

Higgs 機構

ゲージ対称性が自発的に破れる場合を考えます．次の Lagrangian で記述される複素スカラー場の$U(1)$ゲージ理論を考えます．

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + |D_\mu \phi|^2 + \mu^2\phi^*\phi - \frac{\lambda}{2}(\phi^*\phi)^2$$

共変微分 D_μは$U(1)$ゲージ場 A_μを用いて次のようになります．

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

この理論は次の局所的 $U(1)$変換のもとでの対称性を持ちます．

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha(x)}\phi(x), \qquad A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$

真空期待値 $\langle\phi\rangle$ を次のように選びます．

$$\langle\phi\rangle = \phi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

ここで複素スカラー場 ϕを２つの実スカラー場ϕ_1, ϕ_2を用いて次のように表します．

$$\phi(x) = \phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) + \phi_2(x))$$

これによってポテンシャルは次のようになり質量を持つ場 ϕ_1と質量を持たない場 ϕ_2が結合していることが分かります．

$$V(\phi) = \frac{1}{2\lambda}\mu^4 + \frac{1}{2}\cdot 2\mu^2\phi_1^2 + \mathcal{O}(\phi_i^3)$$

では共変微分はこの自発的対称性の破れのもとでどうなるでしょうか．Lagrangian の共変微分項はこの自発的対称性の破れのもとで次のように書き換えられます．

$$\begin{aligned}|D_\mu\phi|^2 &= |\partial_\mu\phi|^2 + ieA_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - ie\partial_\mu\phi A^\mu\phi^* + e^2A_\mu A^\mu|\phi|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \sqrt{2}e\phi_0A_\mu\partial^\mu\phi_2 + e^2\phi_0^2A_\mu A^\mu + \cdots\end{aligned}$$

書き換えた後の第４項は$U(1)$ゲージ場 A_μの質量項になっています．つまり**$U(1)$ゲージ場 A_μは$U(1)$ゲージ対称性が自発的に破れたことで質量 $m_A^2 = 2e^2\phi_0^2$を獲得した**ことが分かります．このようにあるゲージ群についてのゲージ理論においてそのゲージ対称性が自発的に破れることで対応するゲージ場が質量を獲得することを **Higgs 機構**と呼びます．

GWS 理論におけるゲージ場の質量獲得

ゲージ群が$SU(2) \times U(1)$であるゲージ理論における Higgs 機構を考えます．$SU(2)$変換のもとでスピノルとして振る舞い，$U(1)$変換の電荷が $\frac{1}{2}$ であるスカラー場 ϕ が理論に含まれているとし，この

スカラー場を **Higgs 場**と呼びます．つまり Higgs 場は $SU(2)\times U(1)$変換のもとで次のように変換します．

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha^a\tau^a}e^{i\beta/2}\phi$$

ただし τ^aは$SU(2)$リー代数の生成子であり，ここでは$\tau^a=\sigma^a/2$です．GWS 理論は Higgs 場の真空期待値 $\langle\phi\rangle$ を次のように選べるようなポテンシャル項を持っているとします．

$$\langle\phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}$$

この真空期待値は$SU(2)\times U(1)$変換で$\alpha^1=\alpha^2=0$，$\alpha^3=\beta$とした変換のもとで不変になります．よって$SU(2)\times U(1)$の **4 つの自由度のうち 1 つの自由度に対応する対称性は破れていない**ことが分かります．つまり 4 つのゲージ場のうち 1 つのゲージ場は質量を獲得しません．

このゲージ理論における共変微分は次のようになります．

$$D_\mu\phi=\left(\partial_\mu-igA_\mu^a\tau^a-i\frac{1}{2}g'B_\mu\right)\phi$$

Lagrangian の共変微分項のうちゲージ場の質量項を与える項は次のようになります．

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}=&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & v\end{pmatrix}\left(gA_\mu^a\tau^{a*}+\tfrac{1}{2}g'B_\mu\right)\left(gA_\mu^a\tau^a+\tfrac{1}{2}g'B_\mu\right)\begin{pmatrix}0\\v\end{pmatrix}\\=&\frac{v^2}{8}\left\{g^2(A_\mu^1)^2+g^2(A_\mu^2)^2+(-gA_\mu^3+g'B_\mu)^2\right\}\end{aligned}$$

ここでゲージ場 A_μ^a,B_μを次のように $W_\mu^\pm,Z_\mu^0,A_\mu$に置き換えます．

$$\begin{aligned}W_\mu^\pm&=\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1\mp A_\mu^2)\\Z_\mu^0&=\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3-g'B_\mu)\\A_\mu&=\frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}(gA_\mu^3+g'B_\mu)\end{aligned}$$

これによってゲージ場の質量項を与える項は次のようになります．

$$\Delta\mathcal{L}=\frac{v^2}{8}\left\{(W_\mu^+)^2+(W_\mu^-)^2+(g^2+g'^2)(Z_\mu^0)^2\right\}$$

$W^\pm$ ボソン，Z ボソン，Aボソンの質量は次のようになります．

$$m_W=g\frac{v}{2},\qquad m_Z=\sqrt{g^2+g'^2}\frac{v}{2},\qquad m_A=0$$

実験から電磁相互作用と弱い相互作用のゲージ場のうち光子だけは質量を持たないことが分かっており，このAボソンが光子であることがわかります．光子は$U(1)$ゲージ理論のゲージ場であるので**破れていない対称性は$U(1)$であることが分かります**．

GWS 理論における左巻きフェルミオンと右巻きフェルミオン

GWS 理論では右巻きのフェルミオンは$SU(2)$変換のもとでスカラーとして振る舞います．これによって GWS 理論におけるフェルミオン(電子，左巻きニュートリノ，アップクォーク，ダウンクォーク)の運動項は次のようになります．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi=&\bar{E}_L(i\not{D})E_L+\bar{e}_R(i\not{D})e_R\\&+\bar{Q}_L(i\not{D})Q_L+\bar{u}_R(i\not{D})u_R+\bar{d}_R(i\not{D})d_R\end{aligned}$$

ただしe^-,ν_e,u,dは電子，左巻きニュートリノ，アップクォーク，ダウンクォークを表し，E_L,Q_Lは次のように定めます．

$$E_L=\begin{pmatrix}\nu_e\\e^-\end{pmatrix}_L,\qquad Q_L=\begin{pmatrix}u\\d\end{pmatrix}_L$$

GWS 理論におけるフェルミオンの質量獲得

GSW 理論ではフェルミオンと Higgs 場が次の湯川相互作用項で結合しています．

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}=-\lambda_e\bar{E}_L\cdot\phi\,e_R-\lambda_d\bar{Q}_L\cdot\phi\,d_R-\lambda_u\epsilon^{ab}\bar{Q}_{La}\phi_b^\dagger+\text{h.c.}$$

レプトンである電子，左巻きニュートリノの項は Higgs 場の真空期待値を用いて次のようになります．

$$\Delta\mathcal{L}_e=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v(\bar{e}_Le_R+\bar{e}_Re_L)$$

フェルミオンの質量項は右巻きと左巻きに分解すると$(\bar{\psi}_R\psi_L+\bar{\psi}_L\psi_R)$の項なので電子の質量は次のようになります．

$$m_e=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_e v$$

クォークであるアップクォーク，ダウンクォークの項は Higgs 場の真空期待値を用いて次のようになります．

$$\Delta\mathcal{L}_q=-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v\bar{d}_Ld_R-\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v\bar{u}_Lu_R+\text{h.c.}$$

アップクォーク，ダウンクォークの質量は次のようになります．

$$m_u=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_u v,\qquad m_d=\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_d v$$

GWS 理論まとめ

GWS 理論の Lagrangian はこれまでに出てきた項に加えてゲージ場の運動項である Yang-Mills 項 $\mathcal{L}_{YM}$，Higgs 場の運動項とポテンシャル項を合わせた項$\mathcal{L}_\phi$を用いて次のように表せます．

$$\mathcal{L}_{\text{GWS}}=\mathcal{L}_{\text{YM}}+\mathcal{L}_\psi+\mathcal{L}_\phi+\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$$

GWS 理論は左巻きフェルミオンと Higgs 場についてゲージ群が$SU(2)$であるゲージ理論，全てのフェルミオンと Higgs 場についてゲージ群が$U(1)$であるゲージ理論であり，つまり**ゲージ群が$SU(2)_L\times U(1)_Y$であるゲージ理論**です．Higgs 場の真空期待値が 0でないことによる自発的対称性の破れによって**このゲージ対称性は電磁相互作用に対応する$U(1)_{\text{em}}$まで破れます**．

$$SU(2)_L\times U(1)_Y\longrightarrow U(1)_{\text{em}}$$

この自発的対称性の破れによる **Higgs 機構によって$W^\pm$ ボソン，Z ボソンは質量を獲得**し，湯川相互作用項での**自発的対称性の破れにより電子，アップクォーク，ダウンクォークが質量を獲得**します．

参考文献

[1] M.E.Peskin,D.V.Schroeder，『An Introduction to Quantum Field Theory』，CRC Press，1995

[2] 九後汰一郎，『ゲージ場の量子論Ⅰ，Ⅱ』，培風館，1989