1・2・4・8 次元の数と幾何

はるも

概要

本ポスターでは、大学幾何の金字塔の１つともいわれる、数の体系(実ノルム付き除法代数)という代数構造が、球面の平行化という幾何構造を定めるという話題について紹介します。

球面上のベクトル場

ベクトル場とは、ユークリッド空間や多様体の各点にベクトルを連続的に割り当てるものです。電磁場や、天気図に風の矢印が書かれているというイメージです。

ベクトル場によって割り当てられたベクトルが０である点を特異点といいます。Poincare-Hopf の定理からが次が分かります。

２次元球面S^2上のベクトル場は必ず特異点をもつ

このことは直感的には、地球で吹いている風をベクトル場とみなせるが、どこか風が凪いでいる地点(例えば、台風の目のような地点)がある、ということを表しています。「毛玉の定理」としても知られています。

球面の平行化

では、n次元の球面S^nで、特異点をもたないようなベクトル場は存在するのでしょうか？さらに問を強めて、S^n上にn個のベクトル場で、各地点で一次独立であるものを存在させられるでしょうか？後者への答えが真であるとき、「平行化可能である」といいます。

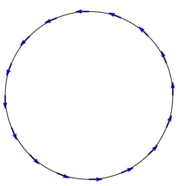
実は、球面S^nが平行化可能であるのは$n=1,3,7$のときのみです。一方、割り算ができてかつ積でノルムを保つ数の体系(乗法が可換・結合的でなくてよい)は実数$\mathbb{R}$、複素数 $\mathbb{C}$、四元数 $\mathbb{H}$、八元数$\mathbb{O}$で終わりです。これらの 2 つのことは密接に関係しています。

複素数

複素数とは、高校の数学Ⅱで登場する、$a+ib$(aとbは実数、iは虚数単位)の形で表される数のことです。

複素数は、$x^2+1=0$といった方程式の解を表すために考案された数で、「代数学の基本定理」から、複素数係数の方程式は必ず複素数の解をもつこと(＝$\mathbb{C}$は代数閉体であること)が知られています。

複素数を用いると、$S^1=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$と表せます。ベクトル場は各点$z$に$zi$というベクトルを与えるもの(位置ベクトルの 90 度回転)とすると、これはS^1上１次独立(今の場合、１次独立⇔０ベクトルでない)という条件をみたします。よってS^1は平行化可能と分かりました。右図はそのベクトル場を表しています。



四元数

19 世紀の数学者ハミルトンは複素数を拡張し、四元数を導入しました。３次元空間内の回転を表すのに便利な数です。四元数の全体を $\mathbb{H}$ の記号で表します。

四元数は、i,j,kという 3 つの虚数単位をもちます。そして、それらがみたす条件は以下の通りです。

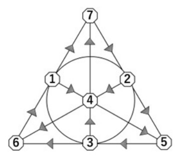
$$i^2=j^2=k^2=-1$$
$$ij=k, jk=i, ki=j$$
$$ij=-ji, jk=-kj, ki=-ik$$

このi,j,k を用いて、四元数とは$a+ib+jc+kd$(a,b,c,dは実数)の形で表される数であると定義されます。

3 つ目の関係式から、四元数の積は非可換であることが分かります。また、積に関して結合的($(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$)です。

それでは、四元数を用いてS^3が平行化可能であることを示します。四元数のノルムは$q=a+ib+jc+kd$に対し$|q|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$と定義されます。すると$S^3=\{q\in\mathbb{H};|q|=1\}$と表されます。そして、各点$q\in S^3$に対しそれぞれ$iq, jq, kq$というベクトルを与える 3 つのベクトル場は、各点で一次独立です。これで示されました。

八元数



八元数は、７つの虚数単位$e_1,\cdots,e_7$をもつ数です。定義のすべてをここでは紹介しませんが、例えば$e_6e_1=e_7, e_1e_6=-e_7$という関係があります(右図はその記憶法です)。積は非可換で、結合的でもありません。これがS^7の平行化に対応します。

最後に

以上に書いた内容を示した人物・年代について紹介しておきます。代数の定理(実ノルム付き除法代数は次元 1,2,4,8 のみ)は 1898 年に Hurwitz によって示されました。そして、幾何の定理(S^nが平行化可能⇔$n=1,3,7$)は、1950 年代後半から 1960 年代初頭にかけて Bott、Milnor、Kervaire や Adams によって示されました。そこでは位相的 K 理論が用いられています。K 理論とはもともと Grothendieck による代数幾何の１つのアイデアでしたが、そのアイデアを応用して位相空間上のベクトル束を分類する位相的Ｋ理論がその頃から発展し、現在も活発に研究されています。

また、このようなテーマに興味を持った方は「多様体」や「代数トポロジー」といった内容から入門してみてください。

参考文献

[1] G. L. Clemente, ”An overview on real division algebras,” 2023.
[2] I. Banerjee, ”The Hopf invariant one problem,” 2016.
[3] J. F. Adams, ”On the non-existence of elements of Hopf invariant one,” 1960.
[4] A. Hurwitz, “Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln,” 1898.