結び目の不変量と量子群

Seito

結び目

３次元空間に浮かんでいる１つの輪っかのことを結び目といい，l個輪っかがあるときはl成分の絡み目といいます[1]．以下の図１,２のように３次元空間内の結び目を２次元空間に射影した図を書き，結び目（絡み目）の図式といいます．輪っかに向きがつけられた結び目（絡み目）を有向結び目（絡み目）といいます．

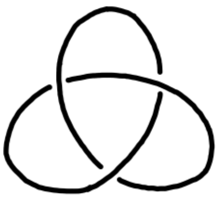

図 1: 左三葉結び目

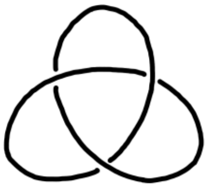

図 2: 右三葉結び目

２つの絡み目が切ったり自分自身と交わったりしないように連続的に変形して互いに移りあえるとき，同値であるといいます[2]．

２つの絡み目が与えられたときに，それらが同値であることを示すには，具体的に変形の過程を示せばいいので簡単ですが，同値でないことを示すのは一般に難しいです．そこで役立つのが絡み目の不変量というもので，これは全ての絡み目にある量を対応させ，同値な結び目に対しては同じ量をあてるようなものです．不変量があると，２つの絡み目に対してそれらの不変量を計算して異なる結果になれば，それらが同値でないことが分かります．

ジョーンズ多項式

絡み目の不変量の例としてジョーンズ多項式というものがあり，次のように計算できます．まず，有向絡み目の図式Lに対して，各交点を以下の図３の①か②に変えてできる図式をLの状態といいます．

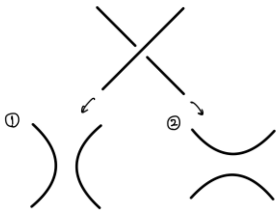

図 3: 交点の変形

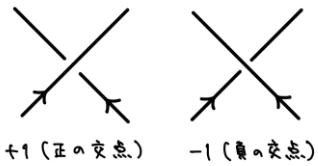

図 4: 交点の正負

このとき，Lのカウフマン括弧 $\langle L\rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ を次のように定義します．

$$\langle L\rangle := \sum_{S:L\text{の状態}} \left[(-A^2 - A^{-2})^{d(S)-1} \prod_{c:L\text{の交点}} W_c(S) \right]$$

ただし，$d(S)$はSの閉じた線の数で，$W_c(S)$はLの交点cを①のように変えていたらAで②のように変えていたらA^{-1}をとるものとします．さらに，上の図４のようにLの各交点に$+1, -1$をつけて，Lのねじり数$\omega(L)$をLのすべての交点に関する$+1, -1$の和として定義します．ここで，$(-A^3)^{-\omega(L)}\langle L\rangle$ にはAの偶数乗しか現れないことが分かるので，

$$V_L(t) := (-A^3)^{-\omega(L)}\langle L\rangle\ \Big|_{A^2=t^{-1/2}} \in \mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$$

と定義して，これを有向絡み目Lのジョーンズ多項式といいます．

組紐群

以下の図５のように，n本の紐をそれぞれ２つの端点が２つの異なる平行な平面上に乗るように３次元空間内に埋め込まれたものをn本の紐からなる組紐といいます．組紐には以下の図６のような合成が定まり，この合成によって群を成します．これを組紐群といい，B_nと書きます．

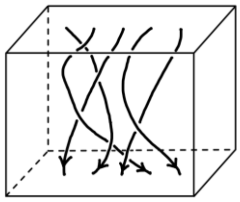

図 5: 組紐

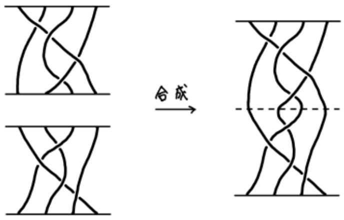

図 6: 組紐の合成

任意のB_nの元は以下の図７のように定義される$\sigma_i, \sigma_i^{-1} (i = 1, \dots, n-1)$の合成で書くことができ，さらに，$B_n$は次のような生成元と関係式の表示で書くことが知られています．

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \,\middle|\, \begin{array}{c} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\ (1 \le i \le n-2) \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\ (|i-j| \ge 2) \end{array} \right\rangle$$

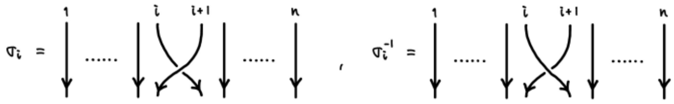

図 7: σ_i, σ_i^{-1}の定義

ここから，組紐と絡み目の関係について見ていきます．まず，ある組紐bの上端と下端を次のページの図８のようにつなげてできる有向絡み目をbの閉包といい，$\hat{b}$と書きます．このとき，以下の二つの定理が成り立ちます．

アレキサンダーの定理

任意の有向絡み目はある組紐の閉包として表すことができる．

マルコフの定理

２つの組紐b_1, b_2に対して，$\widehat{b_1}$と$\widehat{b_2}$が同値な絡み目
$\Leftrightarrow$ b_1に次の２つの操作M1,M2を有限回施して，b_2が得られる．

M1: $\forall a, b \in B_n$, $ab \leftrightarrow ba$, M2: $\forall b \in B_n$, $b\sigma_n \leftrightarrow b \leftrightarrow b\sigma_n^{-1}$

---

[1] 正確には，円周S^1を３次元 Euclid 空間$\mathbb{R}^3$に滑らかに埋め込んだ像を結び目といい，l個のS^1を$\mathbb{R}^3$に滑らかに埋め込んだ像を絡み目といいます．

[2] 正確には，２つの絡み目L, L'に対して，ある連続写像$H: \mathbb{R}^3 \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $(x,t) \mapsto H(x,t)$が存在して，$H(-,t): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$が任意の$t$について微分同相で，$H(-,0) = \mathrm{id}$かつ$H(L,1) = L'$となるときに，$L$と$L'$は同値であるといいます．

これらの２つの定理によって，絡み目のことを，群構造をもつ組紐という対象を用いて考えることができます．さらに，組紐群の表現を考えて，その表現からある量を作り，それがM1,M2に対して不変であることが示せれば，絡み目の不変量が構成できたことになります．

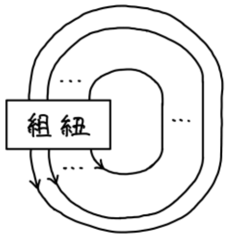

図８：組紐の閉包

そこで，組紐群の表現を考えます．特に，ベクトル空間Vとある線型写像$R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$を用いて，表現 $\psi_n : B_n \to \mathrm{End}(V^{\otimes n})$を

$$\psi_n(\sigma_i) = (\mathrm{id}_V)^{\otimes(i-1)} \otimes R \otimes (\mathrm{id}_V)^{\otimes(n-i-1)}$$

という形で定めることを考えます．このとき，これが表現になるためには$\psi_n(\sigma_i)$が上で示したσ_iと同じ関係式を満たす必要がありますが，後半の関係式は自動的に成り立ちます．前半の関係式が成り立つためには，Rが

$$(R \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_V \otimes R)(R \otimes \mathrm{id}_V) = (\mathrm{id}_V \otimes R)(R \otimes \mathrm{id}_V)(\mathrm{id}_V \otimes R)$$

という式を満たす必要があります．この式をヤン-バクスター方程式といい，この解をR行列といいます．

さらに，$\mathrm{trace}_{V_2}((\mathrm{id}_V \otimes h)R^{\pm 1}) = \mathrm{id}_V$（ただし，$\mathrm{trace}_{V_2}$はテンソル積の第２成分に対するトレース），$R(h \otimes h) = (h \otimes h)R$ という２つの式を満たす$h \in \mathrm{End}(V)$があるとき，写像$B_n \ni b \mapsto \mathrm{trace}(h^{\otimes n}\psi_n(b))$ はM1,M2に対して不変であることが示せます．したがって，ヤン-バクスター方程式と上の２つの式を満たすRとhが得られれば，絡み目の不変量が構成できることが分かります．

量子群の表現とジョーンズ多項式

ここでは，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$の量子群の表現を考えると，上で見たような条件を満たすRとhが得られ，そこからジョーンズ多項式が再構成されることを見ていきます．

まず，リー代数$\mathfrak{g}$に対してそのテンソル代数$T(\mathfrak{g}) = \oplus_{n=0}^{\infty} T^n(\mathfrak{g})$を，$X \otimes Y - Y \otimes X - [X,Y]$　$(X, Y \in \mathfrak{g})$ たちが生成する$T(\mathfrak{g})$の両側イデアルIで割った剰余環 $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I$ を$\mathfrak{g}$の普遍包絡環といいます．この普遍包絡環$U(\mathfrak{g})$をパラメータqで変形して得られるものを量子群といい，$U_q(\mathfrak{g})$と書きます．

以下では，特にリー代数$\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$の量子群$U_q(\mathfrak{sl}_2)$のみを考えます．リー代数$\mathfrak{sl}_2$とは，複素$2 \times 2$行列全体でトレースが０なもの全体で，次の基底と関係式を持ちます．

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[H,E] = 2E \ , [H,F] = -2F \ , [E,F] = H$$

このとき，普遍包絡環$U(\mathfrak{sl}_2)$は，

$$U(\mathfrak{sl}_2) = \mathbb{C}\langle H,E,F \rangle / (HE - EH = 2E, HF - FH = -2F, EF - FE = H)$$

となります．ただし，$\mathbb{C}\langle H,E,F \rangle$は$H,E,F$で生成される非可換多項式です．さらに，リー代数$\mathfrak{sl}_2$の量子群$U_q(\mathfrak{sl}_2)$とは，$K, K^{-1}, E, F$で生成され，

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1$$

$$KE = qEK \ , KF = q^{-1}FK \ , EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}$$

を関係式とするような単位元1を持つ$\mathbb{C}$上の環として定義されます．$U_q(\mathfrak{sl}_2)$の定義において$q = e^{\hbar}$とおいて，$K = q^{H/2}$とみなし，$\hbar \to 0$とすれば，$U(\mathfrak{sl}_2)$が復元されることが分かります．

かなり天下り的ですが，次で定義されるような$\mathcal{R} \in U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$（の適切な完備化）を考えます．

$$\mathcal{R} := q^{H \otimes H/4} \exp_q((q^{1/2} - q^{-1/2})E \otimes F)$$

ただし，$\exp_q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/4}}{[n]!} x^n$ ，$[n]! = [n][n-1] \cdots [1]$（$[n] := (q^{n/2} - q^{-n/2})/(q^{1/2} - q^{-1/2})$）です．ここで，$\mathcal{R} = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$として$\mathcal{R}_{12} := \mathcal{R} \otimes 1$ ，$\mathcal{R}_{23} := 1 \otimes \mathcal{R}$ ，$\mathcal{R}_{13} := \sum_i \alpha_i \otimes 1 \otimes \beta_i$とおくと，$\mathcal{R}_{12}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23}\mathcal{R}_{13}\mathcal{R}_{12}$という関係式が成り立ちます．これを量子化されたヤン-バクスター方程式といい，$\mathcal{R}$を普遍R行列といいます．さらに，$u := \sum_i S(\beta_i)\alpha_i$ とおいて，$v := K^{-1}u$とします．

さて，ここで$U_q(\mathfrak{sl}_2)$の２次元既約表現 $\rho_{V_2} : U_q(\mathfrak{sl}_2) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$を

$$\rho_{V_2}(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \rho_{V_2}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \rho_{V_2}(K) = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

で定義します．このとき，上で定義した$\mathcal{R}, u, v$を用いて，$R := \rho_{V_2}(v) \cdot P((\rho_{V_2} \otimes \rho_{V_2})(\mathcal{R})), h := \rho_{V_2}(uv^{-1})$という量を考えます．これを定義から計算すると，

$$R = \begin{pmatrix} q^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & 0 \\ 0 & q^{-1} & q^{-1/2} - q^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix} , h = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}$$

となります．

これらのRとhは組紐群の章で述べたヤン-バクスター方程式と２つの関係式を満たすことが分かります．したがって，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$の２次元既約表現から構成したRとhから上で述べたような構成によって絡み目の不変量が構成できます．

実はこの不変量は，本質的にはジョーンズ多項式と一致することが分かります．正確には，ここで定義したRとhにおいて$q^{1/2} = -t^{-1/2}$と変換した行列から作られる$\mathrm{trace}(h^{\otimes n}\psi_n(b))$という量を$(-t^{1/2} - t^{-1/2})$で割った量はジョーンズ多項式と等しくなります．

$$V_L(t) = \frac{1}{(-t^{1/2} - t^{-1/2})} \mathrm{trace}(h^{\otimes n}\psi_n(b))$$

したがって，最初に図式の変形を用いて組み合わせ論的に定義されたジョーンズ多項式が，量子群の表現を考えることで得られることが分かりました．

量子不変量

上ではかなり天下り的にRとhを構成しましたが，実は，一般論としてリボンホップ代数という特別なクラスのホップ代数の既約表現から上で述べた性質をもつRとhが作れることが分かります．さらに，一般に単純リー代数$\mathfrak{g}$に対して，その量子群$U_q(\mathfrak{g})$はリボンホップ代数の構造を持つことが知られているので，様々な単純リー代数$\mathfrak{g}$と$U_q(\mathfrak{g})$の表現を考えることで一気に大量の不変量が得られることが分かり，これらをまとめて量子不変量と呼びます．

参考文献

[1]　大槻知忠,『結び目の不変量』, 共立出版(2015)

[2]　村上順,『結び目と量子群』, 朝倉書店(2000)