正方形以外の正ｎ角形は格子点上に配置できない！

YU

概要

正方形を除いて正ｎ角形（ｎは３以上の整数）の各頂点を平面格子点上に配置できないことについて、無限降下法を用いた直感的な証明をします。

全体の流れと注意

次のような流れで証明をしていきます。

１．正三角形の各頂点が格子点上に配置できない

２．正五角形の各頂点が格子点上に配置できない

３．正六角形の各頂点が格子点上に配置できない

４．ｎを７以上の整数としたときに、正ｎ角形が格子点上に配置できない

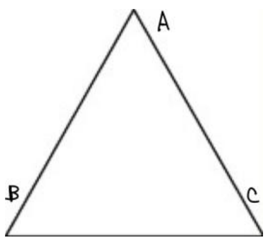
【注意！】

本ポスターにおけるメインは２と４であり、そこで無限降下法と呼ばれる手法を用いるのですが、２と４（特に４）についてはかなり直感的な証明をしています。曖昧な点が多いということをはじめにことわっておきます。

本論

では、証明をしていきましょう。

１．正三角形の各頂点が格子点上に配置できないこと



正三角形 ABC（図１）の各頂点が格子点上に配置できたと仮定する。

格子点を座標平面と見たとき、点Ａが原点Ｏにあるとしても一般性は失われない。

(図１)

このとき、点Ｂ、点Ｃの座標をそれぞれ

(b_1,b_2)，(c_1,c_2)　とおく。(各成分は整数)

このとき点Ｃは点Ｂを原点中心に反時計回り６０度回転させた点とみなせるので、次の式が成り立つ。

$c_1=\frac{1}{2}b_1-\frac{\sqrt{3}}{2}b_2$，$c_2=\frac{\sqrt{3}}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2$．

・b_2が０のとき

$c_2=\frac{\sqrt{3}}{2}b_1$ であり、b_1はいま０でないので、c_2は無理数になる。これは矛盾である。

・b_2が０でないとき

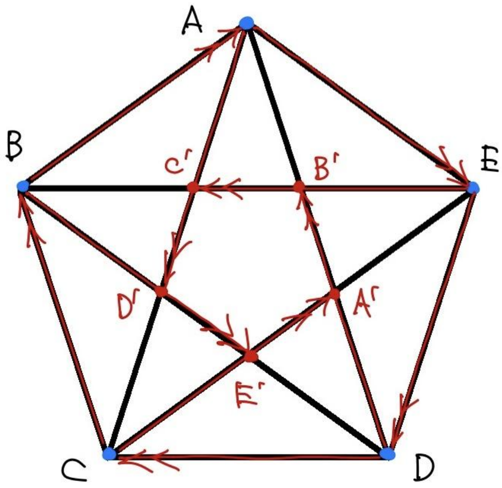
$$\sqrt{3}=\frac{b_1-2c_1}{b_2}$$

が成り立つ。左辺は無理数、右辺は有理数より、これは矛盾。

したがって、正三角形の各頂点は格子点上に配置できない。

２．正五角形の各頂点が格子点上に配置できないこと

ここでは、無限降下法と呼ばれる手法を用います。



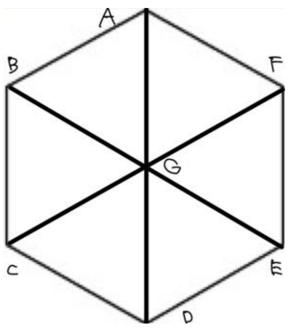
(図２)

正五角形 ABCDE（図２）の各頂点が格子点上に配置できたと仮定する。このとき、線分 AC,CE,EB,BD,DA を与え、それらの交点として与えられる５点 A’,B’,C’,D’,E’ を図２のように定める。このとき、五角形 A’B’C’D’E’ は正五角形になる。さらに、ベクトル BA とベクトル CA’ は一致するので、点 A’ は格子点上に存在する。同様の理由で点 B’,C’,D’,E’ も格子点上に存在する。したがって正五角形 A’B’C’D’E’ もその各頂点が格子点上に存在する。同じ議論を繰り返すことで、正五角形 A’B’C’D’E’ の内部にもさらに正五角形が作れる（もちろんその各頂点は格子点上)。これを繰り返して正五角形を作り続けると、正五角形は小さくなり続け、最終的には各頂点を格子点上に配置できる正五角形として最小の正五角形である正五角形 A*B*C*D*E*に到達する。しかし、同様の議論でさらにその内部に各頂点が格子点上にある正五角形を作れてしまうが、これは最小性に反するので矛盾。

よって、正五角形の各頂点は格子点上に配置できない。

３．正六角形の各頂点が格子点上に配置できないこと

この証明は１番の事実に帰着して示せます。



正六角形 ABCDEF（図３）の各頂点が格子点上に配置できたと仮定する。このとき、線分 AD,BE,CF を与えると、これらは一点 G で交わる。この点 G は正六角形 ABCDEF の中心である。

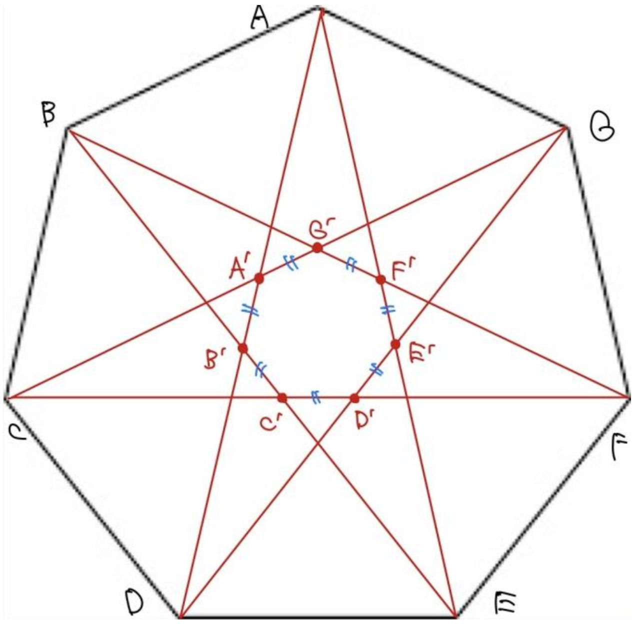
(左：図３)

ここでベクトル AF はベクトル BG に等しいので、点 G は格子点上に存在する。そして三角形 ABG は正三角形であるので、正三角形の各頂点が格子点上に配置できたことになる。これは１の事実に反するので矛盾である。

よって正六角形の各頂点は格子点上に配置できない。

４．ｎを７以上の整数としたときに、正ｎ角形が格子点上に配置できないこと

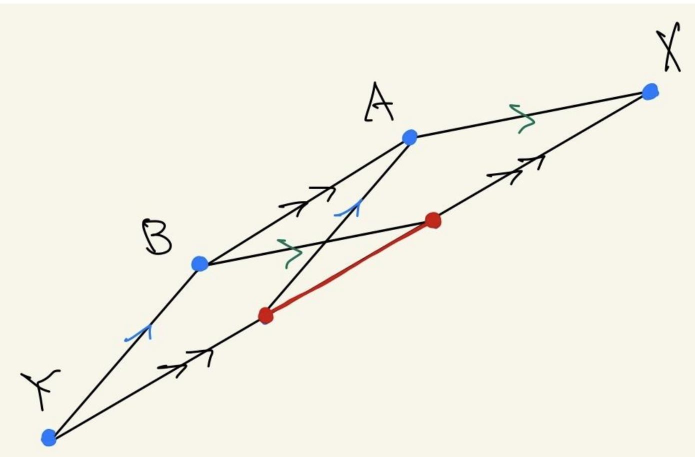
２番と同様、無限降下法で示します。ここでもやることは同じで、正ｎ角形（ｎは７以上の整数）の内部に線分をいくつか引くことで、格子点にのっているような正ｎ角形を再び内部に作ろうというわけです。
まずｎ＝７のばあいについて例示して考えてみます。



（図４）

正七角形 ABCDEFG（図４）の各頂点が格子点上に存在すると仮定する。BA と平行である線分 CG を引き、同様にして線分 DA,EB,FC,GD,AE,BF を引く。それらの交点として点 A’,B’,C’,D’,E’,F’,G’ が図４のように得られ、これら７点は正七角形をなす。ベクトル BA とベクトル CA’ は一致するので、点 A’ は格子点上に存在する。他の点も同様の理由で格子点上に存在するので、正七角形 A’ B’ C’ D’ E’ F’ G’ の各頂点は格子点上に存在する。そして２番と同じ議論によって矛盾が生じるので、正七角形の各頂点は格子点上に配置できない。

（ここからはかなり直感的なので説明口調で書きます）
ｎが８以上の整数のばあいについては、ｎ＝７の場合と全く同様にして示すことができます。正ｎ角形の各頂点を A,B,C,…としたとき、A の B でない方の隣の点を X とし、B の A でない方の隣の点を Y として定めます。（図５参照）



（図５）

点 X,Y を線分で結ぶと、これは線分 AB と平行になります。この操作を（はじめに与えた正ｎ角形の外周の）各線分に対して行います。そして図５の形の図形たちを張り合わせて外側が正ｎ角形の外周になるようにすると、図５の赤線分たちが正ｎ角形をなすことが直感的にわかると思います。そしてその新たに作られた内部の正ｎ角形の各頂点が格子点上に存在することもわかります。したがって２番と同じ議論によって矛盾が生じます。よって、正ｎ角形（ｎは８以上の整数）の各頂点は格子点上に配置できないことが分かります。

よって、以上のことから、正方形を除いた正ｎ角形（ｎは３以上の整数）の各頂点は平面格子点上に配置できないことが示されました。

（証明終）

おわりに

・平面格子点上に配置できない、という証明でしたが２番のような議論は３次元座標における格子点に対しても通用するので、少なくとも正五角形及び正ｎ角形（ｎは７以上の整数）は、その各頂点を３次元格子点上に配置することもできないことが分かります。
・これまで書いてきた証明のアイデアは全て自分の高校時代の友人 A によるものであり、それをもとに自分が具体的な証明を書き起こしたポスターになっています。彼には色々なことを教えていただきました。ここに感謝の意を表したいと思います。ありがとうございました。

少しでもこの内容を面白いと思っていただけたなら幸いです。
ありがとうございました。