高校数学を場の量子論を使って解こう！

うぉむ

問題

次の問題を解け.

(1)1~8 の数字でラベル付けされた 8 つの球を 4 つの区別されない箱に 2 つずつ分ける場合の組み合わせの数を求めよ.

(2)黒球 1 つ，白球 1 つ，赤球 3 つ，青球 3 つを 4 つの区別されない箱に 2 つずつ分けることを考える．ここで赤球 3 つと青球 3 つを入れ替えた組み合わせは同一視するとした場合の組み合わせの数を求めよ.

(3)(2)のそれぞれの組み合わせについて(1)の組み合わせのうちいくつと対応しているかを明らかにせよ.

解説

まず相関関数$\langle 0|T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4|0\rangle$に対して Wick 縮約を次のように定義します.

$$\langle 0|\,T\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\,|0\rangle = \langle 0|\,\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\,|0\rangle + \langle 0|\,\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\,|0\rangle + \langle 0|\,\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\,|0\rangle$$

より一般に n 点相関関数についても全てのϕについて可能な縮約をとったもの全ての和として Wick 縮約を定義します.

ここで次の量(∗)を考えます.

$$\frac{(-ig)^2}{2!(3!)^2}\int d^4y d^4z\ \langle 0|\,T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(y)^3\phi(z)^3\,|0\rangle$$

(∗)に対して Wick 縮約をとることを考えてみます．Wick 縮約は 2 つのϕをペアにすることなので 2 つの球を 1 つの箱に入れることと対応しています．(∗)は 8 点相関関数なので Wick 縮約をとる操作は 8 つの球を 4 つの箱に入れる操作に対応します．またϕと球の色の対応は$\phi(x_1)$を黒球，$\phi(x_2)$を白球，$\phi(y)$を赤球，$\phi(z)$を青球と対応させることにします．この対応により黒，白球が 1 つずつ，赤，青球が 3 つずつあることと積分変数を入れ替えても(∗)の値は変わらないことから赤球 3 つと青球 3 つを入れ替えた組み合わせは同一視することが表現されています.

(1)

8 つの球を区別した場合の箱に入れる組み合わせの数を求めたいので$\phi(y),\phi(z)$それぞれとy,zの入れ替えを全て区別して Wick 縮約の取り方のパターンをみれば良いです. Wick 縮約の取り方は

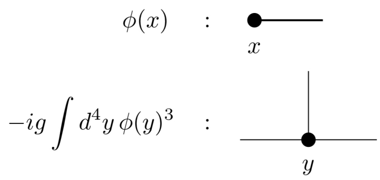
$$\frac{{}_8C_6\ {}_6C_4\ {}_4C_2\ {}_2C_0}{4!} = 105$$

通りなので答えは 105 通りです.

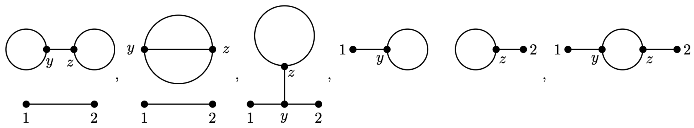
(2)

(∗)について Wick 縮約を取ることは(2)の状態で球を箱に入れることと同じであることを確認したので, Wick 縮約を取って出てくる項の数が(2)の答えになります．相関関数の Wick 縮約を計算する方法として Feynman diagram を用います．まず Feynman diagram を次のように定義します.

$\phi(x)$ と$-ig\int d^4y\,\phi(y)^3$を次のように図形と対応させ，Wick 縮約で結ばれているものは図形同士の線をつなげます.



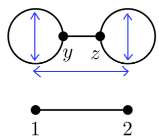
Feynman diagram を用いると(∗)の Wick 縮約は次の 5 つの図形で表せることがわかります.



よって答えは 5 通りです.

(3)

素朴に考えると赤球 3 つ，青球 3 つ，赤青の入れ替えの同一視の分で$3!\cdot 3!\cdot 2! = 72$個の組み合わせがそれぞれ(2)の 5 つの組み合わせに対応しているように思えます．しかしこれでは同じ箱に入る二つの球や箱まで区別してしまっていて区別しすぎです．例えば同じ箱に赤球が 2 つ入っている状態を 2 回カウントしています．よって求めたい値は 72 をこの余分な区別の数で割れば良いです．余分な区別は同じ箱に同じ色が入っているときと同じ色の組み合わせが複数の箱にある時に起こります．これは Feynman diagram で見ると図形の中に対称な図形があることに対応します．この図形の対称性の数を対称因子と呼び，この問題は(2)のそれぞれの図形の対称因子を計算して 72 から割れば良いことがわかります．例えば一番左の図形の対称因子は次のように考えると$2!\cdot 2!\cdot 2! = 8$であり答えは 9 通りです.



同様にして対称因子を考えると残りの 4 つの図形に対応する答えは 6 通り,36 通り,18 通り,36 通りになります.

おわりに

この計算は 4 次元時空で Lagrangian の相互作用項が$\mathcal{L}_{int} = -\frac{ig}{3!}\phi^3$

となる場の量子論における 2 点相関関数の摂動 2 次の計算と全く同じものです．Wathematica で行われている九後ゲージゼミでこの計算を高校数学の問題に変換することに成功しました.

参考文献

[1]九後汰一郎,『ゲージ場の量子論Ｉ』, 培風館, 1989