

# ブラックホールと光の話

労作

## 概要

重力が強い天体は光さえも飲み込むブラックホール(BH)になるという。ニュートンの重力理論では便宜的に光に質量があると仮定して議論できるが、これは本来正しくない。そこで光の質量を仮定しない一般相対性理論(GR)で BH について考えてみよう。

## ニュートン重力理論での BH

まず高校範囲の物理学で考える(ニュートンの重力理論)。光を便宜的に質量 $m$ の粒子と仮定する(実際には質量はない)。質量 $M$ の天体の中心から距離 $R$ の位置で外向きに速度 $c$ で光を放ったとする。このとき粒子の持つエネルギー $E$ は位置エネルギーの基準を無限遠にとると重力定数 $G$ を用いて以下で表せる。

$$E = \frac{1}{2}mc^2 - G \frac{Mm}{R}$$

いま、無限遠で速度が0として解けば

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

という関係が得られる。この距離より中心側から出た光は脱出することができないのでこれは BH の半径のような性質を表しているといえよう!

## アインシュタイン重力理論での BH

### 一般相対性理論

上で BH のモデルをうまく考えられたように思われる!しかしこれは仮定で光に質量があるとしていてよくない。光の質量を考えずに BH を考えることはできるだろうか。ここでアインシュタインの一般相対性理論 (GR) で考えてみる。これは重力と加速度は等価という原理で重力を語っている。詳細は私が語るべき範疇を超えていると感じるため興味のある方は参考文献を参照してもらいたい。GR では重力を時空の歪みとして扱う。時空が歪んでいるからその歪みに沿って自然と”落ちる”という解釈でいいだろう。この場合、落ちるものの質量は問題にならない。どの方向にどれだけ歪んでいるかを計量 $g_{ab}$  ( $a, b = 0, 1, 2, 3$ ) という量でまとめられる。これを線素 $ds$  という量で以下のように表現しよう。このとき光線は線素 $ds^2 = 0$ を満たす曲線として表される。

$$ds^2 = \sum_{b=0}^3 \sum_{a=0}^3 g_{ab} dx^a dx^b$$

### 時間変化しない球対象な BH

BH の内側から光を出して、それが外に出ないことを示そう。ここでは時間変化しない球対称な BH を考える。この計量は以下のようなになる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

ここで $R$ は上で求めた値で $c$ は光速、 $t$ は無限遠で静止した観測者の時間である。 $(r, \theta, \phi)$ は球座標(3次元の極座標)の値であるが、先

ほどと同様に球面に対して垂直に運動する場合を考えたいので、角度成分は無視する。すると、光の軌跡は以下の式の解となる。

$$-\left(1 - \frac{R}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$$

これを解くには本来は数学的に厳密に扱うが、ここでは記号的に解いてみよう。まず $dr, dt$ をそれぞれ一つの数として整理すると

$$\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2 = \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2$$

となる。次にこの負の平方根をとり、両辺に $cdt$ をかけて

$$dr = -\left(1 - \frac{R}{r}\right) cdt$$

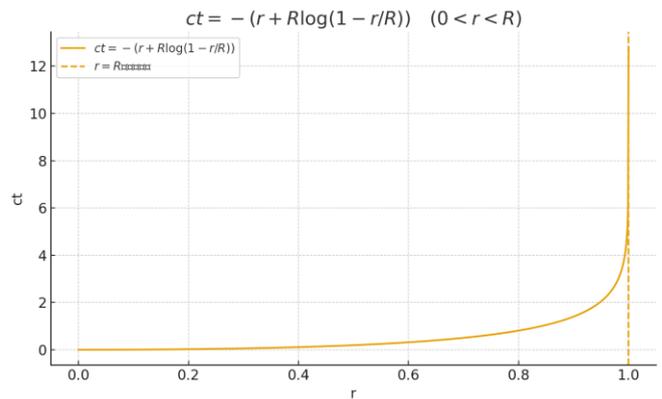
とした後、整理して積分すると、

$$\int \left(1 + \frac{R}{r-R}\right) dr = \int -c dt$$

となる。積分を実行すると、

$$-ct = r + R \log\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

となる。いま内側から出る光を考えているため $0 < r < R$ でこのグラフを描くと以下のようなになる(便宜上 $R = 1$ としている)。



このグラフ上の点は、中心からの距離 $r$ と、その距離まで光が移動したときの観測者の時間 $t$ の関係を表している。ここで、 $r \rightarrow R$ のときに時間が無限大に大きくなることから、BH の外側からこの光を見ようとしている観測者にとっては光がいつまでも外に出てこないように見える。これはまさしく光が出てこないという BH の性質を示している!!

## まとめ

光の質量を考えなくとも、BH から光線は出てこないことが示された。しかしながら、GR での議論は注意すべき点が残っている。GR ではどの座標も等価として考えるため、今回の議論がこの座標特有のものではないかを調べる必要がある。そのためより深く理解するには座標によらない形式で考えるのがよいだろう。このポスターで一般相対論に興味を持つ人が増えたら幸いである。

## 参考文献

- [1]. 佐藤文隆(1978),星の重力崩壊,湯川秀樹監修,岩波講座現代物理学の基礎[第2版]11 宇宙物理学,岩波書店
- [2]. 内山龍雄(1969),一般相対性および重力の理論[第2版],裳華房