ゲージ原理で記述する４つの力

光葉

概要

現在までで, この世界は強い力・弱い力・電磁気力・重力という４種類の根本的な相互作用により構成されることが知られている. このうち重力以外はまとめてゲージ群を$SU(3)\times SU(2)\times U(1)_Y$とするゲージ理論で記述され場の量子論の枠組みでも扱うことができ素粒子標準模型と呼ばれている. 一方, 重力は Einstein の一般相対性理論という時空の幾何学を用いて記述されているが量子化については困難があり完全にはなされていない.

量子化には困難が残るものの４つの力はすべて，古典的にはゲージ理論の枠組みで記述できることを紹介する．この美しさに触れれば, 諸君もゲージ理論教に入信したくなることだろう.

自由 Dirac 場

現実世界の物質を表す Dirac 場$\psi(x)$を例にとって考える. 平坦な Minkowski 時空で計量$\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$とし，自然単位系$\hbar=c=1$において自由 Dirac 場のラグランジアンの作用は

$$I=\int d^4x\sqrt{-\eta}\,L=\int d^4x\sqrt{-\eta}\,\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu-m\right)\psi \tag{1}$$

で与えられる.今 $\eta=det\,(\eta_{\mu\nu})=-1$, Dirac 行列$\gamma$は$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2\eta_{\mu\nu}$をみたす 4 次正方行列.Dirac 共役は $\bar{\psi}=\psi^\dagger\gamma^0$で定める.

電磁場の場合

理論にある大域的対称性を局所化

大域的$U(1)$対称性を局所的ゲージ対称性に変えて整合的な理論を作る（複素平面の座標軸の取り方を時空点毎に独立にする）

$$\psi(\mathrm{x})\to\exp(i\alpha(\mathrm{x}))\psi(x)\ \cong(1+i\alpha(\mathrm{x}))\psi(x) \tag{2}$$

共変微分

(2)の変換では(1)が不変にならないので“うまい”微分を導入

$$D_\mu\equiv\partial_\mu+ieA_\mu(x) \tag{3}$$

e: 電気素量, $A_\mu(x)$ゲージ場（電磁場）

ゲージ変換

$D_\mu\psi(x)$が(2)の変換をするためには, ゲージ場は次の変換をする.

$$A_\mu\to e^{i\alpha(x)}\left(A_\mu-\frac{i}{e}\partial_\mu\right)e^{-i\alpha(x)}=A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \tag{4}$$

場の強さ（曲率）

$[D_\mu,D_\nu]$ は最早ただの数になり場の強さテンソルと一致する

$$[D_\mu,D_\nu]=ieF_{\mu\nu} \tag{5}$$

実際, $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ であり電磁気学の結果と一致する.

電磁場と結合した Dirac 場のラグランジアン密度

$$L_{EM}=\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu-m\right)\psi-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{6}$$

重力理論

一般相対性理論で課す一般座標変換では Dirac 場などのスピノール場を含む多価表現を持てない．そこで平坦な時空でのスピノールの理論において Poincare 対称性を局所化することでのみスピノール場が重力と結合した理論を得られる．スピンという量は重力の効かない微視的領域で導入されたもので，各点毎の局所 Lorentz 系でのみ定まるのは物理的にも自然である.

局所 Lorentz 系(X^k系)・一般座標系(x^μ系)

Lorentz 系間は Lorentz 変換で移りあう$X^k\to a^k{}_lX^l(k=0\sim3)$. 一般座標系($x$系)に対して四脚場$h^k{}_\mu(x)=\partial X^k/\partial x^\mu$を定めると, x系の計量は$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{kl}h^k{}_\mu(x)h^l{}_\nu(x)$.

理論にある大域的対称性を局所化

(1)の平坦時空の自由 Dirac 場のもつ大域的 Lorentz 対称性を局所 Lorentz 対称性に拡張すると

$$\psi(x)\to\Lambda_{1/2}\left(a(x)\right)\psi(x)\cong\left(1+\frac{1}{2}\xi_{kl}(x)\frac{1}{2}\gamma^k\gamma^l\right)\psi(x) \tag{7}$$

$\xi^{kl}(x)$　：反対称, 微小局所 Lorentz 変換パラメータ

$\frac{1}{2}\gamma^k\gamma^l=G^{kl}$ ：Lorentz 変換の生成子, $\gamma^\mu(x)=h^\mu{}_k\gamma^k$.

共変微分

一般座標系変換と局所 Lorentz 変換に対し“うまい”微分を導入

$$\nabla_\mu\psi(x)\equiv\left(\partial_\mu+\frac{1}{2}A_\mu^{kl}(x)G_{kl}\right)\psi(x) \tag{8}$$

ゲージ場 A は kl について反対称, 生成子とまとめて$A_\mu(x)$

ゲージ変換（局所 Lorentz 変換）

$$A_\mu(x)\to\Lambda_{1/2}\left(a(x)\right)A_\mu\Lambda_{1/2}^{-1}-\partial_\mu\Lambda_{1/2}\left(a(x)\right)\cdot\Lambda_{1/2}^{-1} \tag{9}$$

のもとで(8)は共変になる.

場の強さ(曲率)

$$F_{l\mu\nu}^k=\partial_\mu A_{l\nu}^k-\partial_\nu A_{l\mu}^k+A_{m\mu}^kA_{l\nu}^m-A_{m\nu}^kA_{l\mu}^m=R_{l\mu\nu}^k \tag{10}$$

これは Christoffel 記号から定まる Riemann-Christoffel 曲率に一致. スカラー曲率は$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$, G はニュートン定数.

重力と結合した Dirac 場のラグランジアン密度

$$L_G=\sqrt{-g}\left(\frac{R}{16\pi G}+\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\nabla_\mu-m\right)\psi\right) \tag{11}$$

参考文献

[1]　内山龍雄, 一般ゲージ場論序説, 岩波書店, 1987.
[2]　藤川和男, ゲージ場の理論, 岩波書店, 2001.
[3]　藤井保憲, 超重力理論入門, 産業図書株式会社, 2005.
[4]　中嶋慧・松尾衛，一般ゲージ理論と共変解析力学，現代数学社，2020.