いかにして広義積分を定義するか

Y.N.

概要

通常の(リーマン)積分は有界閉集合上で定義された有界関数に対して定義されます。そうでない関数に対しても、適当な条件を満たしている関数に対して広義積分を定義することができます。考えている関数の定義域が$\mathbb{R}$の部分集合である場合、その広義積分は有界閉区間上で定義された有界関数の積分の極限として容易に定義できます。一方、$\mathbb{R}^n$の部分集合における広義積分の妥当な定義を与えることは１次元の場合と同じようにはいきません。このポスターではこのような多次元の広義積分を定義する方法について、１次元の場合との対比をしながら解説しました。

おことわり

本ポスターでは、スペースの都合上以下のような形式をとっていますがご了承ください。

・本来はすべきである証明を省略した箇所があります。

・本来広義積分は有界閉集合ではない様々な集合上で積分することを考えるべきですが、$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \ \ (n = 1,2,3 \cdots)$についてしか議論をしていません。

・「関数f」などと書いた場合、これは定義域に含まれる任意の有界閉集合上可積分なもの(例えば連続なもの)とします。

$\mathbb{R}$上の広義積分の定義

まず、$\mathbb{R}$に含まれる半開区間$[a,\infty), (-\infty,a]$上のfの広義積分は以下のように定義されます。

定義1

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^a f(x)dx$$

と定義する。

この定義は、有界閉区間$[a,M]$に対して$M\to\infty$とすることで非有界区間$[a,\infty)$を近似しようという発想によるものであり、特に問題はないでしょう。次に、開区間$(-\infty,\infty)$上の積分$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$を定義しましょう。先ほどは有界閉区間の右端を伸ばしていきましたが、今回は区間の両端を伸ばそうという発想で$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^M f(x)dx$と定義したくなるかもしれません。しかし、この定義法には問題があり、それは次の例でよく分かります。関数gを

$$g(x) = \begin{cases} x & (|x| < 1) \\ \dfrac{1}{x} & (|x| \geq 1) \end{cases}$$

と定義すると、

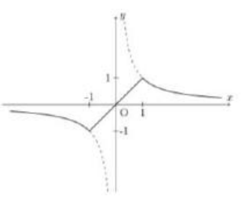

図1 $y = g(x)$の概形

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^M g(x)dx = 0$$

が成り立ちます。ここで、少し意地悪ではありますが、定数$c > 0$を一つ定めて区間$[-cM, M]$に対して$M\to\infty$としても、開区間$(-\infty,\infty)$を近似していることに変わりはないのでこの考えに基づいて計算すると

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{cM} g(x)dx = \log c$$

となります。よって、cの値を変えることで$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{cM} f(x)dx$の値は任意の実数値になり得てしまうのです。この問題は両端が無限に続いている区間$(-\infty,\infty)$の近似を一度の極限操作によって行おうとしたことによって起こりました。この問題を解決するのは簡単で、２つある区間の端点に対して一つずつ極限操作を行えばよいのです。すなわち、次のような定義となります。

定義2

$a(\in\mathbb{R})$を定数とする。定義1を用いて定義される２つの広義積分$\int_a^\infty f(x)dx, \int_{-\infty}^a f(x)dx$が共に有限な実数値となるときに限り

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx + \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

と定義する。

なお、定数aのとり方に依らず$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$の値は一意に定まります。先ほどの関数$g$に対しては$\int_0^\infty g(x)dx = \infty, \int_{-\infty}^0 g(x)dx = -\infty$となるので、結局広義積分$\int_{-\infty}^\infty g(x)dx$は定義できないということです。

$\mathbb{R}^n (n \geq 2)$の場合に伴う困難

さて、本題のn次元の広義積分についての議論に入りましょう。ここではイメージのしやすいように、$n = 2$とし、$\mathbb{R}^2$上の広義積分について考えていきます。($n = 3,4,\cdots$ でも同様の議論ができます。) $\mathbb{R}$の場合と同じように、増大していく$\mathbb{R}^2$の有界閉集合上の積分値の極限として$\mathbb{R}^2$上の広義積分を定義することを試みてみましょう。簡単に思いつくのは、原点を中心とする半径rの閉円盤

$$A_r = \{(x,y) \in R^2 |\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

を用いて$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)dx = \lim_{r\to\infty}\int_{A_r} f(x)dx$と定義することではないでしょうか。しかし、１次元の時にすでに議論したように、$\mathbb{R}^2$を近似するような集合の取り方はこれだけではありません。(下の図2のように様々なものが考えられます。) しかも、１次元の時は区間の両端の２点のみが動きうるため極限操作を２回行えばこの問題を解決できたのですが、今回は集合の「端」となる点が無数にあるため１次元の時と同じ発想で$\mathbb{R}^2$上の広義積分を定義するのは非常に困難です。

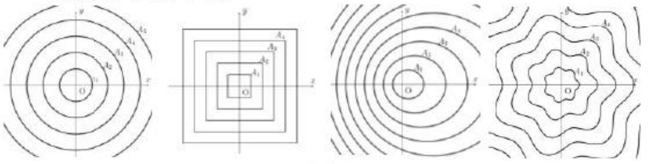

図2

$\mathbb{R}^n(n \geq 2)$ 上の広義積分の定義

少し急ではありますが、$\mathbb{R}^n$上の広義積分として妥当だと考えられる定義を紹介してしまいます。

定義3

⟨1⟩関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$は、$f(x) \geq 0\ (\forall x \in \mathbb{R}^n)$ を、満たすものとする。また、$\mathbb{R}^n$の部分集合で有界閉なもの全体の集合を$\mathcal{K}$とおく。このとき、fの$\mathbb{R}^n$上の広義積分を

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sup\left\{\int_A f(x)dx \,\middle|\, A \in \mathcal{K}\right\}$$

と定義する。

⟨2⟩ $f(x) \geq 0$とは限らない関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$に対して 2 つの関数$f^+, f^-: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$を

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & (f(x) \geq 0) \\ -f(x) & (f(x) < 0) \end{cases}$$

と定義すると、

$$f^+(x) \geq 0, f^-(x) \geq 0, f(x) = f^+(x) - f^-(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$$

が成り立つ。ここで、⟨1⟩の方法で定義される$\int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)dx$, $\int_{\mathbb{R}^n} f^-(x)dx$が共に有限な実数値となるときに限って、

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x)dx$$

と定義する。

⟨1⟩非負の値をとる関数fの $\mathbb{R}^n$上の広義積分を関数の極限として定義するのではなく、$\mathbb{R}$の部分集合$\left\{\int_A f(x)dx \,\middle|\, A \in \mathcal{K}\right\}$の上限としています。次に⟨2⟩では非負とは限らない関数fを非負な値をとる2つの関数f^+, f^-の差として表すことで⟨1⟩の考え方を使えるようにしています。

定義3で諦めたもの

定義3でn=1としても意味を成すため、$\mathbb{R}$上の広義積分をこれによって行っても妥当な定義になります。最後に、この定義とすでに紹介した定義2の違いについて説明します。証明は省略しますが、$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$が定義3によって定義できる場合、定義2によっても定義できます。さらに、この 2 つの定義によって計算される $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$の値は一致します。しかし、$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$が定義2によっては定義できるが定義3によってはできない場合が存在します。つまり、定義2は定義3の一種の上位互換になっているのです。そのような例を紹介します。関数$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を

$$h(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{|\lfloor x \rfloor| + 1}$$

と定義する。定義1によれば、

$$\int_0^\infty h(x)dx = \lim_{M \to \infty} \int_0^M h(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

$$\int_{-\infty}^0 h(x)dx = \lim_{M \to \infty} \int_{-M}^0 h(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2 - 1$$

より、定義2によれば、

$$\int_{-\infty}^\infty h(x)dx = \int_0^\infty h(x)dx + \int_{-\infty}^0 h(x)dx = 2\log 2 - 1$$

となる。

一方、定義3に説明された方法で定義される$h^+(x)$に対して、

$$\int_{\mathbb{R}} h^+(x)dx = +\infty$$

となるため、定義3によれば$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx$は定義できないということになります。

一般的に言うと、定義2の意味で$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$は定義できるが$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx$は有限な値とならない場合、定義3では $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$が定義できないのです。よって、定義3はこのような関数の広義積分を定義することを諦めた代わりに、$\mathbb{R}^n$上の広義積分の妥当な定義を与えることができるようになったということができるのです。

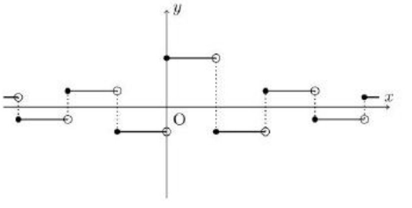

図3 $y = h(x)$の概形

参考文献

[1] 杉浦光夫 『解析入門Ⅰ』 東京大学出版会 1980
[2] 杉浦光夫 『解析入門Ⅱ』 東京大学出版会 1985
[3] 笠原晧司 『対話･微分積分学』 現代数学社 1973